ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 44.02.02 ПРЕПОДАВАНИЕ В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ

Авторы: Романова Тамара Георгиевна, преподаватель ГБПОУ ИО БПК им.Д.Банзарова
Романова Елена Николаевна, преподаватель ГБПОУ ИО БПК им.Д.Банзарова

Математические понятия. Объём и содержание понятия.
Виды определений. Определение понятия через род и видовое отличие.
Требования к определениям.

М.П. – совокупность суждений о *существенных(S)* признаках объекта

Содержание(S) -
необходимые

S ↔ V

Объём(V) – *объекты, …… термином*

Определения

неявные

- **остенсивные** показ
- **контекстуальные** текст

явные

А = В

- **индуктивные** Правило получения
- **генетические** Способ образования
- **через род и вид**

Соразмерность
Отсутствие порочного круга
Достаточность
Научность и т.д.

Определяемое П = Родовое П + Видовое О

Понятие высказывания(**В**) и предиката(**П**). Смысл слов «и», «или», «не» в составных высказываниях. Таблицы истинности.

предложение

П- A(x) x∈ X, если x=a

В- и л

э A, э B, э C } C

конъюнкция ^ A ^ B

A **и** B

A	B	A^B
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Если A и B истинны

дизъюнкция V A v B

A **или** B

A	B	AvB
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Если A и B ложны

отрицание ¬

Ā , ¬A «**не** A»

A	Ā
и	л
л	и

Если A ложно

импликация → A→B

Если A, **то** B

A	B	A→B
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Если A-истинно, B-ложно

эквиваленция ↔

A↔B

A **тогда и только тогда, когда** B

A	B	A↔B
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Если A и B имеют одинаковую истинность

3. Кванторы. Построение отрицания высказываний с кванторами.

О

Кванторы (К) – общее название логических операций, которые по предикату A(x) создают высказывание… $\forall$ A(x) $\longrightarrow$ **А** или $\exists$ A(x) $\longrightarrow$ **А**

Всеобщности $\forall$: ***для всех, каждый, любой***

Any

И – доказывается, **Л** - контрпример

Существования $\exists$: ***найдется, существует***

Existence

Л – доказывается, **И** - пример

Отрицание **А** с квантором

Неверно, что **А…**

$\forall$ $\Updownarrow$ $\exists$ + $\bar{A}$

Понятие множества. Способы задания множеств. Отношения между двумя множествами. Изображение множеств при помощи кругов Эйлера.

Множество

- **A** = {a,b,c…}
  - a Є A
- **B** = {1,2,3…}
  - a ∉ B
- **C** = … студентов
- **D** ={x /x Є Z,x>5}

Способы задания

Перечислением

Характеристическим свойством

Пустое $\emptyset$

Числовое **N,Z,Q,I,R**

Универсальное **U**

n(**A**) – количество элементов в **A**

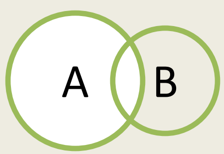
Бесконечное / конечное / n($\emptyset$)=0

Отношения … М

Нет общих

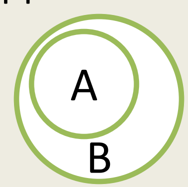
A = {a,b,c} B={m,n}

Есть общие



A = {a,b,c} B={c,n}

A подмножество B



A = {a,b} B={a,b,c}

A⊂ B, B⊂ A

A = {a,b,c} B={a,b,c}

A = B

Операции над множествами: пересечение, объединение. Основные законы операций над множествами.

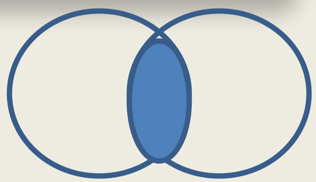
Пересечение

О

A ∩ B = {x / x Є A и x Є B}

A={a,b,c} B={a,d,k}

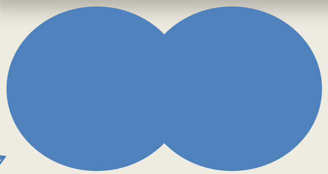
A∩B = {a}



Объединение

О

A U B = {x / x Є A или x Є B}



A={a,b,c} B={a,d,k}

A U B = {a,b,c,d,k}

Законы

коммутативный

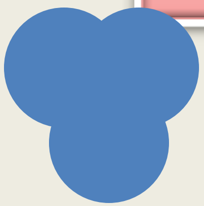
A U B = B U A

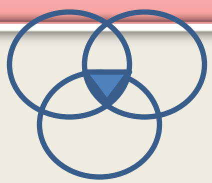
A ∩ B = B ∩ A

ассоциативный

(AUB)UC = AU(BUC)

(A∩B)∩C = A∩(B∩C)

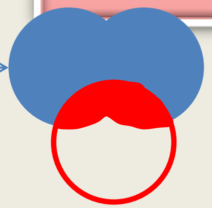


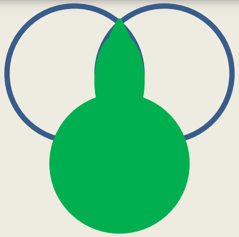


дистрибутивный

(A U B)∩C = (A∩C)U(B∩C)

(A∩B) UC= (AUC)∩(BUC)





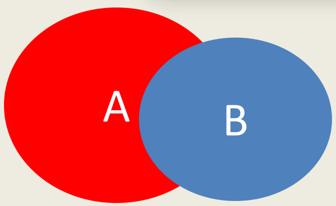
Вычитание множеств. Дополнение множества. Понятие разбиения множества на классы.

Вычитание

О Разность

$A \setminus B = \{x \,/\, x \in A$ и $x \notin B\}$

$B \subset A$



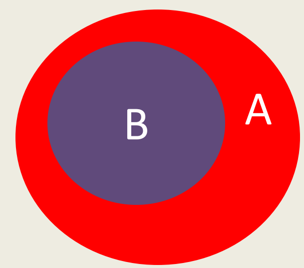
$A=\{a,b,c,d\}$

$B=\{a,m,n\}$

$A \setminus B=\{b,c,d\}$

О Дополнение

Дополнением В до А



$A=\{a,b,c,d,e\}$

$B=\{a,b,d\}$

$A \setminus B=\{c,e\}$

Разбиение на классы

$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$X_1=\{1,2,3\}$

$X_2=\{4,5\}$

$X_3=\{6\}$

$X_4=\{7\}$

Декартово произведение множеств. Изображение на координатной плоскости декартова произведения числовых множеств.

Декартово произведение

У.пара компоненты

(x,y)

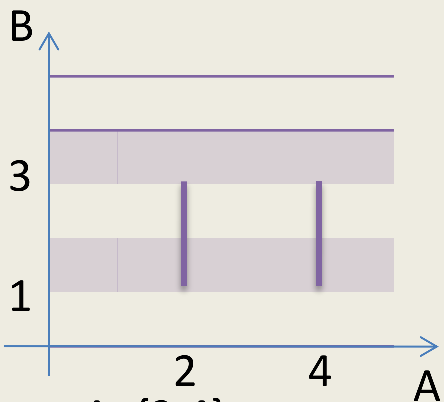
О

$A \times B = \{(x,y) / x \in A \text{ и } y \in B\}$

A \ B	**1**	**2**	**3**
2	2,1	2,2	2,3
4	4,1	4,2	4,3

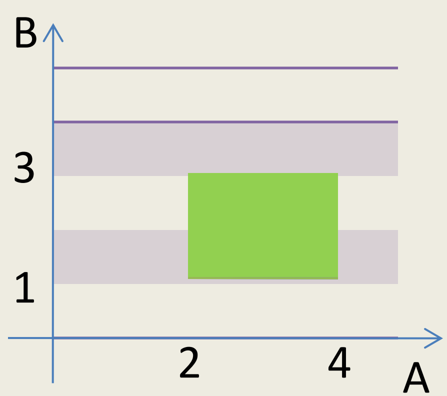
12, 21, ром, мор, кот, ток

A={a,b,c} B={m,n} AxB={(a,m),(a,n),(b,m),(b,n),(c,m),(c,n)}



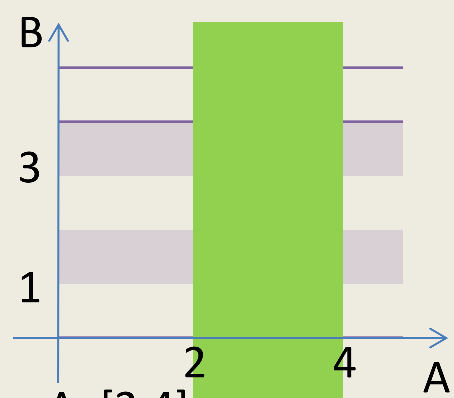
A={2,4}

B=[1,3]



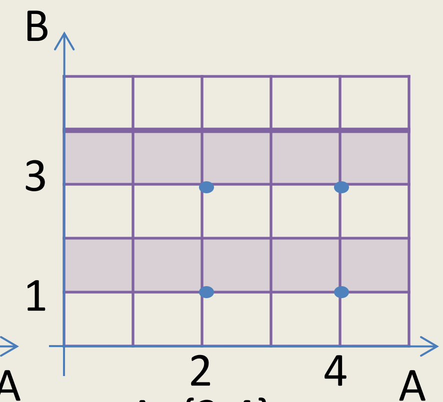
A=[2,4]

B=[1,3]



A=[2,4]

B=R



A={2,4}

B={1,3}

A=R

B=R

Вся *xOy*

Понятие соответствия между множествами. Способы задания соответствий. Взаимно однозначное соответствие. Определение равномощных множеств.

О

Бинарное **соответствие** между … X и Y – подмножество X x Y

R,F,S

Полное *F=XxY*

Пустое *F=∅*

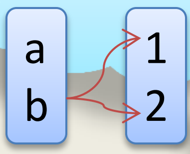
Противоположные *R –дополнение F до XxY*

Обратное *F^{-1}*

Способы задания R

Предикатом
x<y

Графом

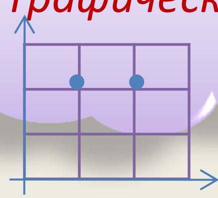


Графиком
{(1,3),(2,3)}

Таблицей

	3	4
1	1,3	1,4
2	2,3	2,4

Графически



ВОС

X={1, 3, 5}

Y={2, 4, 6}

A ~ B
Равномощны

А и В конечны

A ~ B
Равночисленны

Рефлексивно
симметрично
транзитивно

A~B

А -множество действительных чисел
В -множество точек прямой

Понятие отношения на множестве, способы их задания. Свойства отношений.

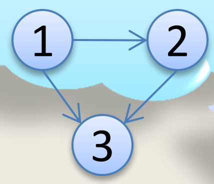
О Бинарное **отношение** на X – подмножество X x X

R,F,S

Предикатом

x<y

Графом



Способы задания R

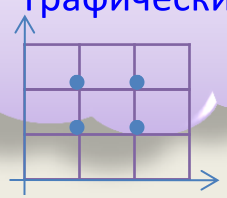
Графиком

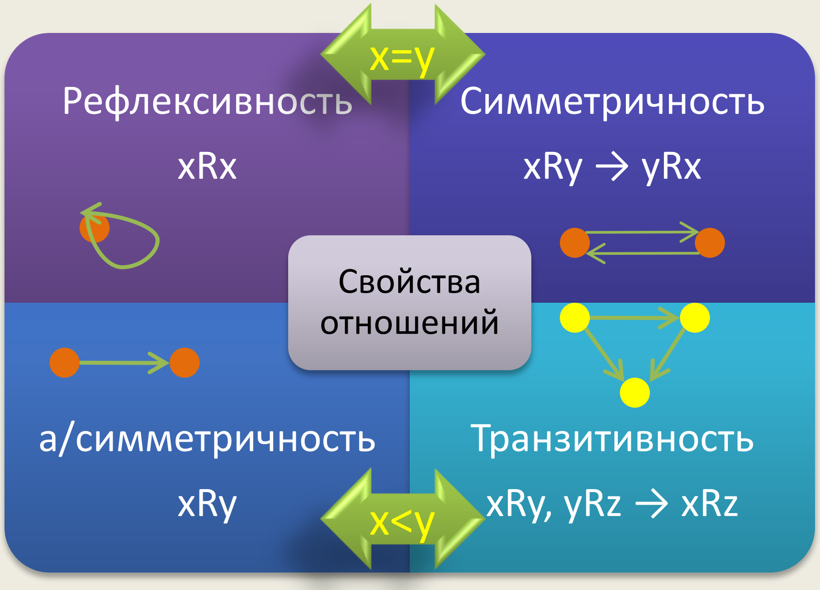
{(1,1),(1,2)}

Таблицей

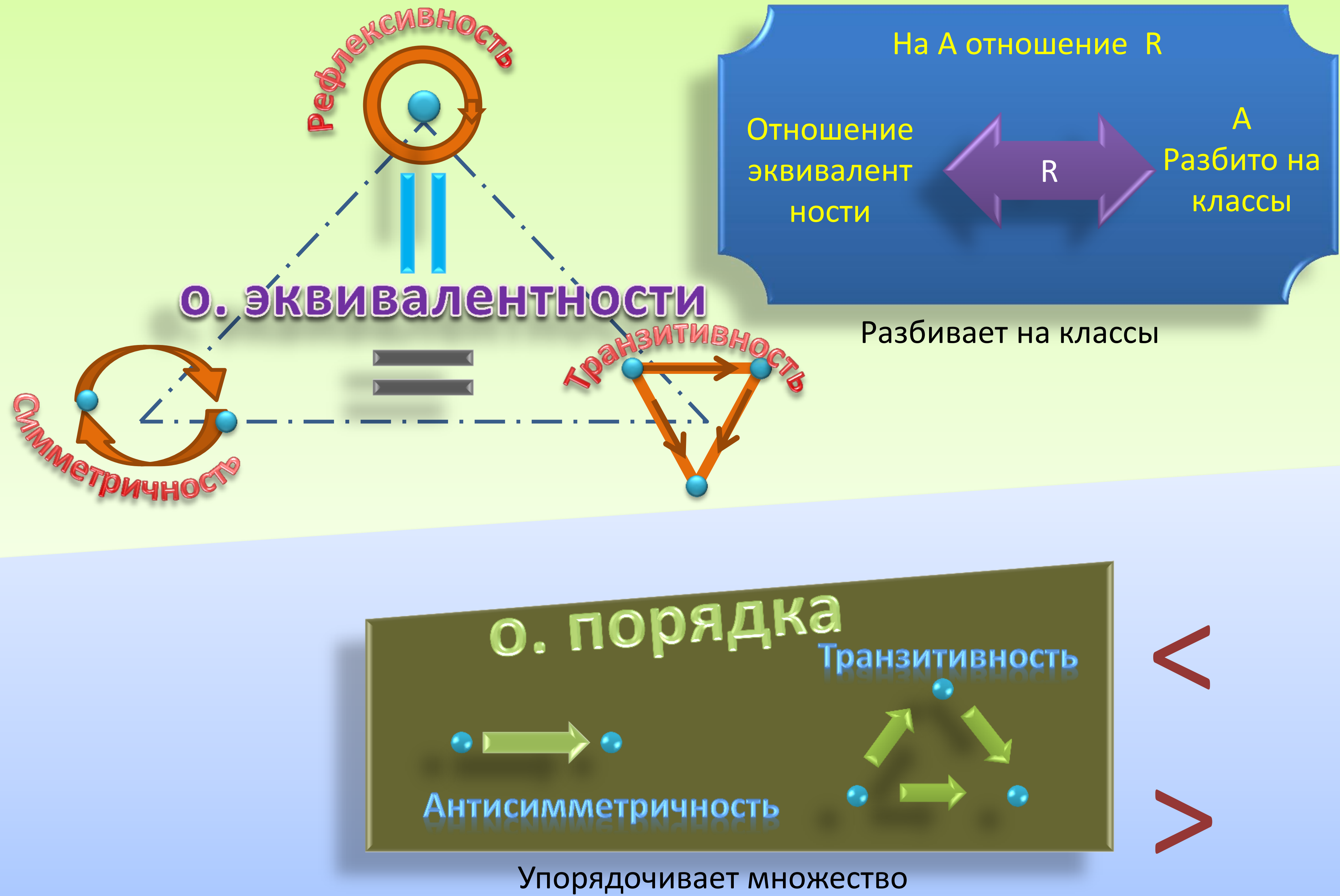
	1	2
1	1,1	1,2
2	2,1	2,2

Графически





Отношение эквивалентности и его связь с разбиением множества на классы. Отношение порядка.



Понятие числовой функции и её графика. Основные свойства функций.

О

Числовой функцией … соответствие , при котором $\forall$ x є X сопоставляется по некоторому правилу y! є Y

f(x), f, X→Y

X – о.определения, D_f

Y – о.значений, E_f

…***задана***, если

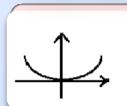
1. Задано X
2. Правило соответствия

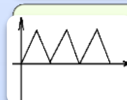
- аналитически $y=x^2$
- словесно т.задача
- графически
- графом
- таблично

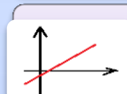
О

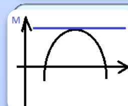
График f(x) -множество точек плоскости xOy с координатами (x,f(x))

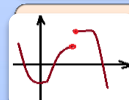
Свойства функций


чётность(нечётн)


периодичность


монотонность


ограниченность


непрерывность


экстремумы

Элементарные

✓Степенная

✓Тригонометрические

✓Показательная

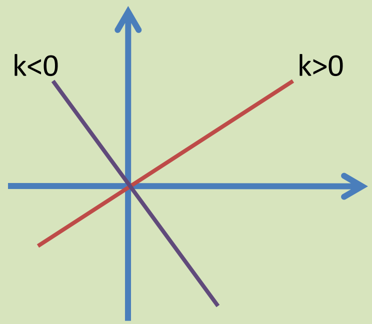
✓Логарифмическая

Прямая и обратная пропорциональность, их свойства и графики.

О Прямой пропорциональностью …, …задана формулой y = kx

k ≠ 0, k є R *k-коэффициент пропорциональности*

Свойства:
$D_f = R$
$E_f = R$
k > 0 y↑
k < 0 y↓



Прямая …ч/з О(0;0)

Y-прямая пропорциональность	
$(x_1;y_1)$	$(x_2;y_2)$

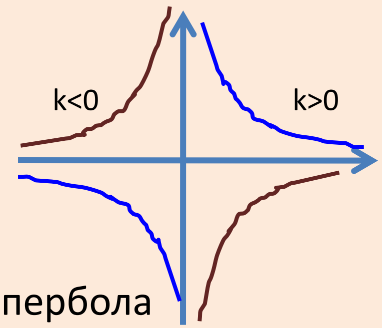
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

доказательство	
$y_1=kx_1$ $y_2=kx_2$	$\frac{y_1}{y_2} = \frac{kx_1}{kx_2} = \frac{x_1}{x_2}$

О Обратной пропорциональностью …, …задана формулой y = k/x

k ≠ 0, k є R

Свойства:
$D_f = R\backslash 0$
$E_f = R\backslash 0$
k > 0 y ↓
k < 0 y ↑



Гипербола

Y-**обратная** пропорциональность	
$(x_1;y_1)$	$(x_2;y_2)$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

доказательство	
$y_1=k/x_1$ $y_2=k/x_2$	$\frac{y_1}{y_2} = \frac{k}{x_1} : \frac{k}{x_2} = \frac{x_2}{x_1}$

Понятие числового выражения и выражения с переменной. Тождественные преобразования выражений. Понятие тождества.

О

Числовое выражение - запись … из чисел, знаков действий, скобок

18 *340:2* *11:(6-6)*

Имеют смысл нет

Выполнив действия → **значение** в.

Равные ч.в. – значения равны

Порядок действий

1. Внутри скобок
2. Значение f(x)
3. Возведение в степень
4. Умножение, деление
5. Сложение, вычитание

Действия одинакового приоритета слева -направо

О

М.в., … буквы – **выражение с переменной**

(25 – 4b):c a,b,c,d,x,y… - переменные

Тождество - равенство выражений, лев.и прав., части … = при всех допустимых значениях ~

Значения равны – *тождественно равные*

Тождественное преобразование – замена … м.в. другим, тождественно равным

(35:5-2)·4 → 100:5

Понятие числового равенства и неравенства. Основные свойства числовых равенств и неравенств.

А и В - числовые выражения

Для любых А, В, С, D

$A = B$
Числовое равенство

О И Л

Свойства

$A = B \to A + C = B + C$

Сл: Если из одной части слагаемое перенести в другую, поменяв знак…

$A=B$ и $C=D \to A+C=B+D$

$A = B \to A \cdot C = B \cdot C$

$A=B$ и $C=D \to A \cdot C = B \cdot D$

$A > B$, $A < B$
Числовое неравенство

О И Л

Свойства

$A > B \to A + C > B + C$

Если из одной части слагаемое перенести в другую, поменяв знак…

$A>B$ и $C>D \to A+C>B+D$

$A>B$ и $C<D \to A-C>B-D$

$A>B \to A \cdot C > B \cdot C$ $C>0$

$A>B \to A \cdot C < B \cdot C$ $C<0$

$A<B<0$ и $C<D<0$

$\to A \cdot C > B \cdot D$

Понятие уравнения с одной переменной. Равносильные уравнения. Теоремы о равносильности уравнений (с доказательством)

О

Уравнением с одной переменной … предикат вида f(x)=g(x), x∈X, f(x) и g(x) – выражения с ~, … на X,

Корень - …x, x∈X, … урав → истинное числовое равенство

Решить уравнение – найти все корни или доказать, что их нет

Множество решений Т – м.истинности f(x)=g(x), м.корней

Т- конечное, бесконеч, ∅

Равносильные уравнения : $T_1=T_2$

Т

f(x), g(x), h(x) - …. на X

$f(x)\overset{1}{=}g(x) \leftrightarrow f(x)+h(x)\overset{2}{=}g(x)+h(x)$

Д

T_1 –м.решений *1*, T_2 –м.решений *2*

1↔2, если $T_1=T_2$

a∈ T_1, подставим в *1*:

f(a)=g(a) -истинное чис.рав +h(a) ч.в.

f(a)+h(a)=g(a)+h(a) -истинное чис.рав

a - корень *2* → *a* ∈ T_2 → $T_1 \subset T_2$

b∈ T_2, подставим в *2:*

f(b)+h(b)=g(b)+h(b) – ист.чис.рав -h(b)

f(b)=g(b)- ист.чис.рав

b-корень *1* → *b* ∈ T_1 → $T_2 \subset T_1$

$T_1 \subset T_2$

$T_2 \subset T_1$ → $\boxed{T_1=T_2}$

Сл1. Если к обеим частям + одно и то же число- равносильные урав

Сл2. Если перенести к-л слагаемое из одной части в другую, поменяв знак - равносильные урав

x +2 = 0

(x – 3)·5 = 12x

Сл. Если обе части умножить(разделить) на одно и то же число - равносильные урав

Т

$f(x)=g(x) \leftrightarrow f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$

Д

Аналогично

Понятие неравенства с одной переменной. Равносильные неравенства. Теоремы о равносильности неравенств (с доказательством)

Т- конечное, бесконечное, ∅

Множество решений Т – м.истинности f(x)>g(x),

О

Неравенством с одной переменной … предикат вида f(x)>g(x), xЄX, f(x) и g(x) – выражения с ~, … на X,

x +2 > 0   *(x – 3)·5 < 12x*

Решение - …x, xЄX, … нерав → истинное числовое неравенство

Решить неравенство – найти множество его решений

Равносильные неравенства : $T_1=T_2$

Т

f(x), g(x), h(x) - …. на X

$f(x) \overset{1}{>} g(x) \leftrightarrow f(x)+h(x) \overset{2}{>} g(x)+h(x)$

Д

T_1 –м.решений *1*, T_2 –м.решений *2*

1↔2, если $T_1 = T_2$

aЄ T_1, подставим в *1*:

f(a)>g(a) -истинное чис.нерав +h(a) ч.в.

f(a)+h(a)>g(a)+h(a) -истинное чис.нерав

a - корень *2* → *a Є* T_2 → $T_1 \subset T_2$

bЄ T_2, подставим в *2*

f(b)+h(b)>g(b)+h(b) – ист.чис.нерав -h(b)

f(b)>g(b)- ист.чис.нерав

b-корень *1* → *b Є* T_1 → $T_2 \subset T_1$

$T_1 \subset T_2$, $T_2 \subset T_1$ → $\boxed{T_1=T_2}$

Сл1. Если к обеим частям + одно и то же число- равносильные неравенства

Сл2. Если перенести к-л слагаемое из одной части в другую, поменяв знак - равносильные неравенства

Т

$f(x)>g(x) \leftrightarrow f(x)\cdot h(x) > g(x)\cdot h(x)$

h(x)>0

Д

Аналогично

Сл. Если обе части умножить(разделить) на одно и то же (+)число - равносильные неравенства

Т

$f(x)>g(x) \leftrightarrow f(x)\cdot h(x) < g(x)\cdot h(x)$

h(x)>0

Сл. Если обе части умножить(разделить) на одно и то же (-)число и поменять знак - равносильные неравенства

Понятие отрезка натурального ряда чисел и счёта элементов конечного множества. Порядковые и количественные натуральные числа. Теоретико-множественный смысл количественного натурального числа и нуля.

О **Отрезком натурального ряда N_a** – множество натуральных чисел, не превосходящих *a* $N_5=\{1,2,3,4,5\}$

Свойства

1. Любой …. N_a содержит 1.
2. Если $x \in N_a$ и $x \neq a$, то $x+1 \in N_a$

Множество *A* … **конечным**, если $A \sim N_a$

Счет элементов *A* – установление ВОС между *A* и N_a

Натуральное число – общее свойство класса конечных равномощных множеств

$0=n(\varnothing)$

Правила счёта:

- Не пропускать числа
- Первый – «один»
- Нельзя считать дважды
- Нельзя пропускать
- Начинать с любого

При счете элементов:

- упорядочивают множество – **порядковые числа**
- находят количество - **количественное число**

Теоретико-множественный смысл суммы двух целых неотрицательных чисел. Законы сложения (с доказательством);

Т

А и В – конечные множества. $A \cap B = \emptyset \rightarrow$

$A \cup B$ конечно, причём $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

О

Сумма ц. н.ч. a и b

$a + b = n(A \cup B)$,

где $a = n(A)$ $b = n(B)$, $A \cap B = \emptyset$

Законы сложения

$a + b = b + a$ коммутативный

Т. к. $A \cup B = B \cup A$ *и* $n(A) = a$, $n(B) = b$ $A \cap B = \emptyset$

$\rightarrow a + b = n(A \cup B) = n(B \cup A) = b + a$

$(a + b) + c = a + (b + c)$ ассоциативный

Т. к. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *и* $n(A) = a$, $n(B) = b$,

$n(C) = c$ *A,B,C попарно не пересекаются*

$\rightarrow$

$(a+b)+c = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = a+(b+c)$

3+4=7

$A = \{a,b,c\}$ $n(A) = 3$

$B = \{d,f,m,k)$ $n(B) = 4$

$A \cup B = \{a,b,c,d,f,m,k\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 7$

Теоретико-множественный смысл разности целых неотрицательных чисел. Определение разности через сумму. Условие существования и единственности разности на множестве целых неотрицательных чисел (с доказательством).

О

Разность ц.н.ч. *a и b* $a - b = n(A \setminus B)$
при $n(A)=a$, $n(B)=b$, $B \subset A$

Т

Разность ц.н.ч. *a* и *b* существует и единственна т. и т.т. , когда $b \le a$

О

Вычитанием натуральных чисел *a и b* называется операция, удовлетворяющая … $a - b = c$ *т. и т. т., когда* $b + c = a$

a и *b* – целые неотрицательные числа, $a=n(A)$, $b=n(B)$

Д

Н. Если $c=a-b$ существует, тогда по определению→ найдется такое $c \in N$, *что* $b+c=a$ → $b<a$

Д. Если $b<a$, то по определению «меньше», существует такое $c \in N$, *что* $c=a-b$ → $a - b$ *существует.*

Е. Пусть $a-b= c_1$ и $a-b= c_2$ $c_1 \neq c_2$
По определению $a=b+c_1$, $a=b+c_2$ →
$b+c_1=b+c_2$ → $c_1=c_2$ → противоречие →
$a-b$ *единственна*

7 – 4 = 3

A = {a, b, c, d, m, k, t} n(A)=7
B = {d, m, k, t} n(B)= 4
$B \subset A$
A\B = {a, b, c} n(A\B) = 3 →
7 – 4 = 3

Правила вычитания числа из суммы и суммы из числа;

Т

Пусть $a, b, c \in N$

1. Если $a > c$, то $(a + b) – c = (a - c) + b$
2. Если $b > c$, то $(a + b) – c = a + (b - c)$
3. Если $a > c$ *и* $b > c$, то *1* или *2*

Т

Пусть $a, b, c \in N$

Если $a > b + c$, то $a - (b + c) = (a - b) - c$

или $a - (b + c) = (a - c) - b$

П

Для того, чтобы вычесть число из суммы, достаточно вычесть это число из одного слагаемого суммы и к полученному результату прибавить другое слагаемое

П

Для того, чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим

(8 + 4) – 6 = (8 - 6) + 4
(5 + 9) – 6 = 5 + (9 – 6)
(10 + 7) – 3 = (10 – 3) +7 = 10 + (7 – 3)

16 – (7 + 4) = (16 – 7) – 4
16 – (7 + 4) = (16 – 4) – 7

ТМС произведения двух целых неотрицательных чисел. Определение произведения через декартово умножение. Законы умножения (с доказательством);

О

$a, b \in Z_+$

Произведением $a \cdot b$ называется число, удовлетворяющее условиям:

1. $a \cdot b = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{b \text{ слагаемых}}$, если $b > 1$
2. $a \cdot b = a$, если $b = 1$
3. $a \cdot b = 0$, если $b = 0$

О

$a \cdot b = n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b)$,
где $n(A_1) = n(A_2) = \ldots = n(A_b)$,
$A_1, A_2, \ldots, A_b$ попарно не пересекаются

$a \cdot b$ $(b>1)$ – число элементов в объединении b множеств, каждое из которых содержит a элементов и никакие два из них не пересекаются

Т

A и B - конечные м. → AxB – конечное м., причём … $n(AxB)=n(A) \cdot n(B)$

$a \cdot b = n(A) \cdot n(B) = n(AxB)$

$a \cdot b$ – число элементов в декартовом произведении A и B, где $n(A)=a$, $n(B)=b$

На одно пальто пришивают 4 пуговицы.

Сколько пуговиц надо пришить на 3 пальто?

$n(A_1) = n(A_2) = n(A_3)=4$,

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)= n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)= 4+4+4=4 \cdot 3$

4·3=12

Законы умножения	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *ассоциативный* A x $(B$ x $C)$~$(A$ x $B)$ x C, т. к. между $Ax(BxC)$ и $(AxB)xC$ можно … ВОС → $n(Ax(BxC)) = n((AxB)xC)$ → $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *дистрибутивный ….(+)* $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ *дистрибутивный … (-)*
$a \cdot b = b \cdot a$ *коммутативный* A x B ~B x A, так как между A x B и B x A можно … ВОС → $n(A$ x $B)=n(B$ x $A)$ → $a \cdot b = b \cdot a$		

Теоретико-множественный смысл частного целого неотрицательного и натурального числа. Определение частного через произведение. Условие существования и единственности частного на множестве натуральных чисел (с доказательством).

Пусть $a=n(A)$ и A разбито на попарно непересекающиеся равномощные подмножества

О

Частным … a и b …:

- *число подмножеств* в этом разбиении, если b – число элементов каждого подмножества в разбиении A;

- *число элементов* в каждом подмножестве, если b – число подмножеств в разбиении A.

На опытном участке посадили 60 саженцев плодовых деревьев по 12 в каждом ряду. Сколько рядов деревьев получилось?

27 учеников разделили на 3 команды поровну. Сколько учеников в каждой команде?

О

$a, b \in N$

Частным a и b … c ∈ N $c= a:b$, *удовлетворяющее* $b \cdot c=a$

Т

Для того, чтобы существовало $a:b$, $(a,b \in N)$, необходимо, … $b \le a$.

Если $a:b$ существует, то оно единственно

Н. Пусть $a:b$ существует → $\exists\, c \in N$ что $a=b \cdot c$

$\forall\, c \in N$ выполняется $1 \le c$. Умножим обе части на $b \in N$ → $b \le b \cdot c$, т.к. $b \cdot c=a$ → $b \le a$.

Е. Пусть $a:b=c_1$ и $a:b=c_2$ и $c_1 \ne c_2$ →

$a=b \cdot c_1$ и $a=b \cdot c_2$ → $b \cdot c_1 = b \cdot c_2$ → $c_1 = c_2$

противоречие, → $c_1 = c_2$

Правила деления суммы(разности) на число и числа на произведение;

Т

Если a и b делятся на c, то → $a+b$ делится на c, причём

$a \vdots c$ и $b \vdots c$

Правило деления суммы на число

$(a + b) : c = a : c + b : c$

$8 \vdots 4$ $12 \vdots 4$ →

$(8 + 12):4 = 8:4 + 12:4$

Т

Если a и b делятся на c, то → $a-b$ делится на c, причём

$a \vdots c$ и $b \vdots c$

Правило деления разности на число

$(a - b) : c = a : c - b : c$

$18 \vdots 3$ $6 \vdots 3$ →

$(18 - 6):3 = 18:3 - 6:3$

Т

Если a делится на b и c, → чтобы a разделить на bc достаточно a:b(c) и полученное частное разделить на c(b)

$a \vdots b$ и $a \vdots c$

Правило деления числа на произведение

$a : (b\cdot c) = (a : b) : c$

$72 \vdots 6$ $72 \vdots 4$ →

$72:(6\cdot4) = (72:6):4$ или

$72:(6\cdot4) = (72:4):6$

Правило деления произведения на число

$\left.\begin{array}{l} a, b, c \in N \\ a \text{ кратно } c \end{array}\right\} \; a \cdot b \text{ кратно } c$

⇕

$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$

$(12 \cdot 7) : 6 = (12 : 6) \cdot 7$

Правило умножения числа на частное

$a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$

$18 \cdot (12 : 3) = (18 \cdot 12) : 3 = (18 : 3) \cdot 12$

Понятие деления с остатком. Теоретико-множественный смысл деления с остатком.

О

Деление с остатком - действие, в котором по двум данным числам a и b $(b \neq 0)$ находят q и r так, чтобы … : $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$; при этом a называют *делимым, b-делителем, q-неполным частным, r- остатком*.

Т

Для любых $a, b \in N$ существует единственная пара ц.н.ч. q и r, удовлетворяющих условию:

$a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$

43 не делится на 5. Но ∃ числа 8 и 3, что 43=5·8+3.
-выполнено деление с остатком: найдено неполное частное 8 и остаток 3.

Пусть $a=n(A)$ и A разбито на $A_1, A_2, \ldots, A_q$, X так, что $A_1 \sim A_2 \sim \ldots \sim A_q$ и содержат по b элементов, а X - … меньше элементов, $n(X) = r$.
Тогда $a=b \cdot q+r$, $0 \leq r<b$. Т.е. неполное частное q - число равномощных подмножеств(по b элементов) в разбиении A, r – число элементов в X.

Остаток $r \in N$ и $r < b$, т.е. $r=0,1,2,\ldots,b-1$.
Если $a<b$, то $q=0$, $r=a$, т.е. $a=0 \cdot b+a$

В начальной школе 9:4 =2(ост. 1)

Деление с остатком лежит в основе алгоритма деления многозначных чисел

Натуральное число как результат измерения величин. Смысл суммы и разности. Смысл произведения и частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

О

Натуральное число как численное значение длины отрезка a показывает, из … … единичных отрезков e слагается … a. При выбранной … e … единственное.

Пусть n - численное … a,
m - численное … b.
Тогда $a=b$, если $n=m$

<u>Сумма</u> $m+n$ $(m,n \in N)$ – значение длины a, состоящего из … b и c, длины которых … m и n.

$b=3e$, $c=5e$ $a=b+c$ $\rightarrow$ $a=(3+5)e=8e$

<u>Разность</u> $m-n$ $(m,n \in N)$ – значение длины c, являющегося разностью … a и b, длины которых … m и n.

$a=9e$ $b=4e$ $a=b+c$ $\rightarrow$ $c=(9-4)e=5e$

<u>Умножение</u> натуральных … - переход к новой (более мелкой) единице длины: $a=m \cdot e$, $e=n \cdot e_1$, то $a=(m \cdot n)e_1$

Пример

<u>Деление</u> натуральных … - переход к новой (более крупной) единице длины: $a=m \cdot e$, $e_1=n \cdot e$, то $a=(m:n)e_1$

Пример

Позиционные и непозиционные системы счисления. Десятичная система счисления. Сравнение чисел по их записи.

О

СС- язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними

О

Позиционная СС – …, в которой один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места(позиции) в записи числа.

О

Непозиционная СС – …, в которой каждый знак всегда обозначает одно и то же число независимо от места(позиции) в записи числа.

О

ПСС … основанием(базисом) – *p*.
Базис – любое число ≥ 2 ($p \geq 2$)

В десятичной СС (ДСС) базис – 10 (0,1,2,…,9)

О

Десятичной записью натурального … x называется его … в виде:

$$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 = 0,1,2,3, \ldots, 9, \quad a_n \neq 0.$

1,10,100, 1000…- разрядные единицы
1, 2, … классов

Т

Пусть $x, y \in N$, имеют запись:

$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$

$y = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + b_1 10 + b_0$

Тогда $x<y$ если:

1. $n<m$
2. $n=m$, но $a_n<b_n$
3. $n=m$, $a_n=b_n, \ldots, a_k=b_k$, но $a_{k-1}<b_{k-1}$

I класс- … единиц
II класс – … тысяч
III класс - … миллионов

Алгоритмы сложения и вычитания многозначных чисел в десятичной системе счисления;

$2534+142 = (2\cdot10^3+5\cdot10^2+3\cdot10+4)+(1\cdot10^2+4\cdot10+2) =$

$= 2\cdot10^3+5\cdot10^2+3\cdot10+4+1\cdot10^2+4\cdot10+2 =$ *(ассоциат)*

$= 2\cdot10^3+5\cdot10^2+1\cdot10^2+3\cdot10+4\cdot10+2+4 =$ *(коммутат)*

$= 2\cdot10^3+(5+1)\cdot10^2+(3+4)\cdot10+(2+4) =$ *(дистрибут)*

$= 2\cdot10^3+6\cdot10^2+7\cdot10+6 = 2676$ *(табл.сложение)*

Теория:
- ✓Способ записи чисел в ДСС;
- ✓Коммутативный закон сложения
- ✓Ассоциативный закон сложения
- ✓Дистрибутивный закон умножения относительно сложения
- ✓Таблица сложения однозначных чисел

Алгоритм:
1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы … разряды … друг под другом.
2. Складывают единицы I разряда. Если сумма<10 – записывают в разряд единиц.
3. Если сумма >10, то её представляют $a_0+b_0=1\cdot10+c_0$. c_0 – разряд единиц и прибавляют 1 к десяткам.
4. Повторяют те же действия с десятками, сотнями и тысячами и т.д.

Теория:
- ✓Способ записи чисел в ДСС;
- ✓Правилах вычитания числа из суммы и суммы из числа
- ✓Дистрибутивный закон умножения относительно вычитания
- ✓Таблица сложения однозначных чисел

Алгоритм:
1. Записывают вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы … разряды … друг под другом.
2. Если цифра вычитаемого ≤ цифры уменьшаемого – записываем разность под единицами.
3. Если цифра вычитаемого > цифры уменьшаемого, то цифру десятков уменьшаем на 1, а цифру единиц на 10 и записываем разность.
4. Если десятки, сотни, … =0, то берем первую отличную от 0 и уменьшаем на 1 …
5. Повторяют те же действия в следующих разрядах и т.д.

Делимость целых неотрицательных чисел. Понятие отношения делимости целых неотрицательных чисел. Теоремы о делимости суммы, разности и произведения целых неотрицательных чисел (с доказательством).

О

Говорят, что ц.н.ч. *a делится на натуральное число b*, если существует такое ц.н.ч c, что $a = b \cdot c$

b – делитель a

a кратно b $a \vdots b$

c – частное a и b

Т

Если каждое слагаемое делится на натуральное число b, то их сумма делится на b

Д

Пусть a_1 делится на b, a_2 делится на b, … a_n делится на b. Тогда существуют такие ц.н.ч. $c_1, c_2, \ldots c_n$, что $a_1=bc_1, a_2=bc_2, \ldots a_n=bc_n$ → $a_1+a_2+ \ldots a_n=bc_1+bc_2+ \ldots bc_n$. Так как $c_1+c_2+\ldots c_n$ – ц.н.ч, то → $a_1+a_2+\ldots a_n$ делится на b.

Т

Если числа a_1 и a_2 делятся на b, то их разность делится на b

Т

Если один из множителей произведения ц.н.ч. делится на b, то и все произведение делится на b

Т

Если в сумме одно слагаемое не делится на число b, то вся сумма не делится на b

Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9 в десятичной системе счисления (с доказательством одного из признаков). Признак делимости на составные числа.

:2

Чтобы **X** делилось на **2**, н. и д. , … его десятичная запись … на 0,2,4,6,8

786, 30, 54 дел на 2 *23, 101 не дел на 2*

Д

Пусть $x=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10+a_0$,
где $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 = 0,1,2,3, \ldots,9$, $a_n \neq 0$.

I. Пусть $a_0 = 0,2,4,6,8$. Докажем, что $x \vdots 2$.
Так как $10 \vdots 2 \to 10^2, \ldots 10^n \vdots 2 \to$
$a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10 \vdots 2$. По условию $a_0 \vdots 2$.
Тогда $x=(a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10)+a_0$ по теореме о делимости суммы кратно 2.

II. Пусть $x \vdots 2$. Докажем, что $a_0 = 0,2,4,6,8$.
$a_0 = x-(a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10)$. По теореме о делимости разности $a_0 \vdots 2$ (т.к $x \vdots 2$ и $a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10 \vdots 2$) $\to$ a_0 принимает значения $0,2,4,6,8$.

Чтобы **X** делилось на **5**, н. и д. , … десятичная запись … на 0 или 5

:5

Чтобы **X** делилось на **4**, н. и д. , … двузначное …, образован из двух последних цифр ÷ на 4

:4

Чтобы **X** делилось на **3**, н. и д. , … сумма цифр его десятичной записи ÷ на 3

:3

Чтобы **X** делилось на **9**, н. и д. , … сумма цифр его десятичной записи ÷ на 9

:9

Пусть D(n,m)=1. Тогда А делится на составное d=m·n только тогда, когда $A \vdots n$ и $A \vdots m$ одновременно

Простые числа. НОК и НОД. Способы нахождения НОК и НОД.

О

Если *a* делится на *b*, то говорят, что *a* кратно *b* ($a \vdots b$).

0 кратен любому числу

О

ОК данных чисел – число, которое кратно каждому из данных чисел $ОК(a_1, a_2, \dots a_n)$.

О

НОК данных чисел – наименьшее … из всех общих кратных $К(a_1, a_2, \dots a_n)$.

1. НОК всегда существует и единственно.
2. НОК чисел a и b не меньше большего из данных чисел.
3. Любое ОК делится на НОК.

Простое число – натуральное …, имеющее 2 делителя: себя и единицу.

О

ОД – натуральное … , на которое делятся все данные числа $ОД(a_1, a_2, \dots a_n)$.

О

НОД данных чисел – набольшее … из всех общих делителей $D(a_1, a_2, \dots a_n)$.

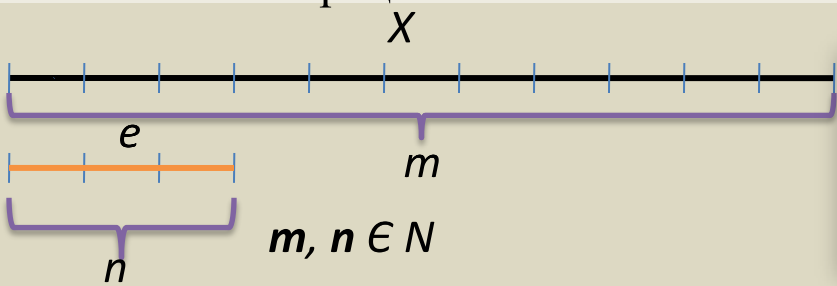
1. НОД всегда существует и является единственным.
2. НОД чисел a и b не превосходит меньшего из данных чисел.
3. НОД делится на любой ОД.

Т

$$К(a,b)\cdot D(a,b)=a\cdot b$$

Способы нахождения НОК и НОД: алгоритм Евклида; с помощью разложения на простые множители

Понятие дроби и положительного рационального числа. Упорядоченность множества положительных рациональных чисел.



$m, n \in N$

m-числитель, n-знаменатель

$m \geq n$ неправильная

$m < n$ правильная

О Даны … X и e. Длина $e = E$. Если X… из m отрезков, равных n-ой части e, тогда длина $X = \frac{m}{n} \cdot E$ $\frac{m}{n}$ - дробь

Т чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ … длину … отрезка, Н. и Д., чтобы $m \cdot q = n \cdot p$

О $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ … равными, если $m \cdot q = n \cdot p$

Основное свойство дроби:
Если m и n *(÷) на одно и то же число, то дробь = данной

Несократимая дробь: $D(m,n)=1$

О $a<b$, если существует такое c, что $a+c=b$

1. “<“ - отношение порядка
2. Если знамен=, то $a<b$, если $m<n$
3. $a<b$, если $mq<np$
4. в Q_+ нет наменьшего (наибольшего) числа;
5. Q_+ - плотно

О Если п.р.ч $a=\frac{m}{n}$ и $b=\frac{p}{q}$, то $a=b$ т. и т. т., когда $m \cdot q = n \cdot p$

О П.р.ч … класс равных дробей.
Дробь, Є классу – запись п.р.ч.

Определение арифметических действий над положительными рациональными числами. Законы сложения и умножения (с доказательством)

+

П.р.ч $a=\frac{m}{n}$; п.р.ч $b=\frac{p}{n}$

О

$a+b=\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$

Т

$(\forall a,b,c \in Q_{+})$ $a+b=b+a$ коммутативно

$(a+b)+c=a+(b+c)$ ассоциативно

Д

$a+b=\frac{m+p}{n}$ $b+a=\frac{p+m}{n}$

Так как $m,n,p \in N$, то $m+p=p+m$

*****

П.р.ч $a=\frac{m}{n}$; п.р.ч $b=\frac{p}{q}$

О

$a*b=\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$

Т

$(\forall a,b,c \in Q_{+})$ $a*b=b*a$ коммутативно

$(a*b)*c=a*(b*c)$ ассоциативно

$(a\pm b)*c=a*c\pm b*c$ дистрибутивно

Понятие скалярной положительной величины и её измерения. Правила выполнения действий с величинами

О **Величина** – количественная характеристика свойств реальных объектов или явлений

- дискретные — *Лес, нат. ряд чисел …*
- непрерывные — *длина, объем____*

Однородные / Разнородные → Свойство → Одно и то же / Разные — *длины*; *масса и стоимость*

Скалярные / **Векторные** → Значение → **Число** / **Число и направл** — *длина*; *скорость*

В нач.кл. понятие в. – без определения

Используемые свойства:

- Любые две однородные в. сравнимы: *a>b* или *a=b*
- В. можно складывать…-того же рода.
- …умножать на действительное число.
- При выбранной *e* мера любого объекта - + действительное число.
- … вычитать, определяя разность через сумму: разностью *c* … число, что *a=b+c*.
- …делить, определяя частное через произведение: частным *x* … число, что *a=x·b*.

Измерить … в. – сравнить значение в. с другим её значением - единицей измерения

Дана … *a*. Нужно её измерить … *e*.

Численным значением *a* при выбранной единице *e* … такое $x \in R_+$, что $a=x\cdot e$. Обозначают $x=m_e(a)$

Действия над именованными числами